Correction Feuille Exercice 6

Manipuler une inégalité mettant en jeu une somme.

Exercice 13

1. Soit $x \geq 0$. On a l'équivalence $e^x \geq x \iff e^x - x \geq 0$. On pose alors la fonction

$$f : x \to e^x - x$$

définie sur $[0;+\infty[$. La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad f'(x) = e^x - 1$$

On résout alors

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff e^x - 1 > 0 \\ &\iff e^x > 1 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

La fonction f est donc croissante sur $[0;+\infty[$. Or $f(0) = e^0 - 0 = 1$. Donc pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 1$ donc $f(x) \geq 0$.

$$\boxed{\text{En conclusion, } \forall x \geq 0,\ e^x \geq x.}$$

2. On a alors

$$\begin{aligned} &\forall k \in \mathbb{N}, \quad e^k \geq k \\ &\implies \sum_{k=0}^{n} e^k \geq \sum_{k=0}^{n} k \\ &\implies \boxed{\sum_{k=0}^{n} e^k \geq \frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

Exercice 14 (*)

Soit $n \geq 2$. On a alors

$$\begin{aligned} &\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad k^n \geq k^2 \\ &\implies \sum_{k=1}^{n} k^n \geq \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &\implies \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^n \geq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \end{aligned}$$

Utiliser la formule des probabilités totales

Exercice 15

On choisit au hasard une des 4 urnes ci-dessous et on en tire une boule au hasard.
- L'urne 1 contient 3 boules rouges, 2 blanches et 3 noires.
- L'urne 2 contient 4 boules rouges, 3 blanches et 1 noire.
- L'urne 3 contient 2 boules rouges, 1 blanche et 1 noire.
- L'urne 4 contient 1 boule rouge, 6 blanches et 1 noires.

On note les évènements :
B : 'La boule tirée est blanche'
$A_i(\ i \in [\![1,4]\!])$: 'On a choisi l'urne i'

On considère le système complet d'évènements (A_1, A_2, A_3, A_4) et on lui applique la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité de B

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + P(A_4 \cap B) \\
&= P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B) + P(A_4)P_{A_4}(B) \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{6}{8} \\
&= \frac{1}{16} + \frac{3}{32} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} \\
&= \frac{2}{32} + \frac{3}{32} + \frac{2}{32} + \frac{6}{32} \\
&\boxed{= \frac{13}{32}}
\end{aligned}$$

Exercice 16 (*)

Soit n un entier plus grand que 1. Dans un sac, on place n jetons numérotés de 1 à n. On a également n urne telle que l'urne k contienne k^2 boules blanches et $n^2 - k^2$ boules noires. On considère l'expérience suivante :

1. On tire un jeton aléatoirement du sac.
2. On pioche dans l'urne correspondant au numéro du jeton, une boule. On regarde la couleur de cette boule.

On note les évènements B : 'La boule tirée est blanche' et $A_k(\ k \in [\![1,n]\!])$: 'On a tiré le jeton n° k'

On considère le système complet d'évènements $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$. On applique la formule des probabilités totales afin de calculer la probabilité de B

$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k^2}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\
&\boxed{= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}}
\end{aligned}$$

Exercice 17 (**)
On considère une particule se déposant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B, C d'un triangle suivant le procédé suivant :

— Si la particule se trouve en B, elle y reste.
— Si la particule se trouve en A, elle se trouve à la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.
— Si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois et a 7 chances sur 12 d'aller en B. Enfin, il y a une chance sur 12 d'aller en A.

A la première seconde elle se pose au hasard sur l'un des trois sommets.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement : « à la n-ième seconde, la particule se trouve en A (respectivement B et C) »et on note a_n, b_n, c_n les probabilités de A_n, B_n, C_n.

1. A la première seconde, la particule se pose aléatoirement sur un des 3 sommets. Elle a donc autant de chance de se trouver en A, B ou C :
$$\boxed{a_1 = b_1 = c_1 = \frac{1}{3}.}$$
2. On traduit les hypothèses. Si la particule se trouve en B, elle y reste donc
$$P_{B_n}(A_{n+1}) = 0 \qquad P_{B_n}(B_{n+1}) = 1 \qquad P_{B_n}(C_{n+1}) = 0$$
Si la particule se trouve en A, elle ira de façon équiprobable sur l'un des trois sommet
$$P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3} \qquad P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3} \qquad P_{A_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}$$
Enfin si la particule se trouve en C, elle y reste une fois sur trois et a une chance sur 4 d'aller en B. Enfin, il y a 5 chances sur 12 d'aller en A.
$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{12} \qquad P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{7}{12} \qquad P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}$$
On considère le système complet d'évènement (A_n, B_n, C_n) auquel on applique la formule des probabilités totales
$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{12} \\ &\boxed{= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n} \end{aligned}$$
De même
$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times 1 + c_n \times \frac{1}{4} \\ &\boxed{= \frac{1}{3}a_n + b_n + \frac{7}{12}c_n} \end{aligned}$$
Enfin,
$$\begin{aligned} c_{n+1} = P(C_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{3} \\ &\boxed{= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n} \end{aligned}$$

3. D'après la troisième expression, on a

$$c_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}c_{n+1}$$

En utilisant l'expression $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{12}c_n$, on a

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n\right) + \frac{1}{3}c_{n+1} \\ &= \frac{1}{9}a_n + \frac{1}{36}c_n + \frac{1}{3}c_{n+1} \end{aligned}$$

Enfin

$$c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \iff 3c_{n+1} = a_n + c_n \iff a_n = 3c_{n+1} - c_n$$

On a alors

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= \frac{1}{9}(3c_{n+1} - c_n) + \frac{1}{36}c_n + \frac{1}{3}c_{n+1} \\ &= \frac{1}{3}c_{n+1} - \frac{1}{9}c_n + \frac{1}{36}c_n + \frac{1}{3}c_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}c_{n+1} - \frac{1}{12}c_n \end{aligned}$$

On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On a également $c_1 = \dfrac{1}{3}$ et $c_2 = \dfrac{1}{3}a_1 + \dfrac{1}{3}c_1 = \dfrac{2}{9}$. On résout l'équation

$$x^2 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{12} \iff 12x^2 - 8x + 1 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 64 - 48 = 16$ L'équation a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{8+4}{24} = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{8-4}{24} = \frac{1}{6}$$

Il existe alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tel que

$$c_n = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

En utilisant $c_1 = \dfrac{1}{3}$ et $c_2 = \dfrac{2}{9}$. On obtient le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{6}\mu &= \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{36}\mu &= \frac{2}{9} \end{cases} &\iff \begin{cases} 3\lambda + \mu &= 2 \\ 9\lambda + \mu &= 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3\lambda + \mu &= 2 \\ 6\lambda &= 6 \end{cases} \qquad L_1 - L_2 \to L_2 \\ &\iff \begin{cases} \mu &= -1 \\ \lambda &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

On utilise la relation $a_n = 3c_{n+1} - c_n$. Ainsi

$$\begin{aligned} a_n &= 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 3\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &\boxed{= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n} \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant la relation $b_n = 1 - a_n - c_n$, on obtient

$$\begin{aligned} b_n &= 1 - \left(\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right) \\ &\boxed{= 1 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n} \end{aligned}$$

Déterminer l'indépendance d'évènements.

Exercice 18

On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer n tirages (avec $n \geq 2$) dans une urne contenant 3 boules noires et 5 boules rouges. Les tirages se feront avec remise. On note les évènements A_k : "On tire une boule rouge au k-ième tirage".

1. L'évènement A : "Les tirages n'amènent pas de boules noires" s'écrit $A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$. Les évènements sont mutuellement indépendants donc

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} P(A_k) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{5}{8} \boxed{= \left(\frac{5}{8}\right)^n} \end{aligned}$$

2. B_k : "La première boule rouge est obtenue au k-ième tirage" (avec $k \in [\![1, n]\!]$ fixé). Les évènements B_k s'écrivent

$$B_k = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \overline{A_j}\right) \cap A_k$$

Les évènements étant mutuellement indépendants, on a

$$\begin{aligned} P(B_k) &= P\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \overline{A_j}\right) \cap A_k\right) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{k-1} P(\overline{A_j})\right) \times P(A_k) \\ &\boxed{= \left(\frac{3}{8}\right)^{k-1} \frac{5}{8}} \end{aligned}$$

Exercice 19 (*)
On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer n tirages avec remise (avec $n \geq 4$) dans une urne contenant 1 boule noire et 2 boules rouges. Calculer la probabilité de l'évènement C : "On obtient au moins une boule rouge"

Afin de calculer la probabilité de l'évènement C, on introduit les évènements N_k (resp. R_k) : "On tire une boule noire (resp. rouge) au $k^{\text{ème}}$ tirage". On a $C = R_1 \cup \ldots \cup R_n = \bigcup_{k=1}^{n} R_k$.

Remarque : Le problème, c'est que les évènements R_1, $R_2, \ldots, R_n$ ne sont pas incompatibles. On ne peut donc pas utiliser la propriété du cours. On va alors utiliser le fait que $C = \overline{N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_n}$. On peut retrouver ce résultat en utilisant les formules de Moivre ou tout simplement en remarquant qu'obtenir au moins une boule rouge revient à ne pas obtenir que des boules noires.

Les évènements N_1, N_2, …,N_n sont mutuellement indépendants donc

$$\begin{aligned}
P(C) &= P\left(\overline{N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_n}\right) \\
&= 1 - P(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_n) \\
&= 1 - \prod_{k=1}^{n} P(N_k) \\
&= 1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{3} \\
&\boxed{= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}
\end{aligned}$$

Calculer la puissance d'une matrice.

Exercice 20
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Par le calcul, on a bien $A = I_2 + J$.
2. On a

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{par récurrence } J^n = J.}$$

3. Les matrices I et J commutent. On utilise alors le binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
A^n = (I+J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^k J^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} J + J^0 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\right) J + I_2
\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

On a donc

$$A^n = (2^n - 1)J + I_2$$

et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

Exercice 21 (*)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Par le calcul, on vérifie que $A = 2I_3 + J$.
2. On a

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout } n \geq 3, \text{ on a } A^n = 0.}$$

3. Les matrices J et I_3 commutent donc on peut utiliser le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} A^n = (I_3 + J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (2I_3)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k \\ &= \binom{n}{0} 2^n J^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} J + \binom{n}{2} 2^{n-2} J^2 + 0 \\ &= 2^n I_3 + n2^{n-1} J + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} J^2 \\ &\boxed{= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-1}n + 2^{n-2}n(n-1) \\ 0 & 2^n & 2^n n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}} \end{aligned}$$